

# BPSK

Project\_石政修\_E24109024

## Part 1. Derivation of the theoretical bit-error rate

### 一、 BPSK equivalent discrete time model 推導

Derive the equivalent discrete-time system model from the continuous-time model.

傳送端訊號

$$\begin{aligned}x(t) &= A\cos(\omega_c t + \phi), & \phi &= \begin{cases} 0 & \text{if 1 is transmitted} \\ \pi & \text{if 0 is transmitted} \end{cases} \\ &= Ad\cos(\omega_c t), & d &= \begin{cases} 1 & \text{if 1 is transmitted} \\ -1 & \text{if 0 is transmitted} \end{cases}\end{aligned}$$

其中  $0 < t < T$ ,  $A = \sqrt{\frac{2E_b}{T}}$  且  $T$  是 bit interval。

接收端訊號

$$r(t) = x(t - \tau_0) + n(t)$$

其中  $\tau_0$  是 delay,  $n(t)$  是 AWGN。

解調

乘上同頻率的餘弦訊號再通過 LPF。

即把  $\omega_c$  的訊號降到基頻，同時產生高頻分量，因此透過積分器(LPF)濾掉。

$$\begin{aligned}
z &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} r(t)[2 \cos(\omega_c t + \theta)] dt \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2[x(t - \tau_0) + n(t)] \cos(\omega_c t + \theta) dt \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2x(t - \tau_0) \cos(\omega_c t + \theta) dt \\
&\quad + \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2n(t) \cos(\omega_c t + \theta) dt
\end{aligned}$$

定義  $z = s + w$ 。

### 1. 訊號 S 部分

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2x(t - \tau_0) \cos(\omega_c t + \theta) dt \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2Ad \cos(\omega_c t - \omega_c \tau_0) \cos(\omega_c t + \theta) dt \\
&= Ad \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} [\cos(2\omega_c t - \omega_c \tau_0 + \theta) + \cos(\omega_c \tau_0 + \theta)] dt \\
&= \left[ \frac{Ad \sin(2\omega_c t - \omega_c \tau_0 + \theta)}{2\omega_c} \right]_{\tau_0}^{\tau_0+T} + AdT \cos(\omega_c \tau_0 + \theta) \\
&= AdT \cos(\omega_c \tau_0 + \theta) \\
&= \sqrt{2E_b T} d \cos(\omega_c \tau_0 + \theta)
\end{aligned}$$

假設相位同步  $\theta = -\omega_c \tau_0$  則  $s = d\sqrt{2E_b T}$  ----- (a)

### 2. 雜訊 w 部分

$$w = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2n(t) \cos(\omega_c t + \theta) dt$$

由於  $n(t)$  是 Gaussian random process，所以經過線性轉換後的  $w$  仍然是 Gaussian random process。

$$\because E[n(t)] = 0 \text{ and } R_n(\tau) = E[n(t)n(t - \tau)] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

$$\therefore E[w] = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2E[n(t)]\cos(\omega_c t + \theta)dt = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[w] &= E[w^2] \\ &= E\left[\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2n(t_1)\cos(\omega_c t_1 + \theta)dt_1 \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} 2n(t_2)\cos(\omega_c t_2 + \theta)dt_2\right] \\ &= 4E\left[\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} n(t_1)n(t_2)\cos(\omega_c t_1 + \theta)\cos(\omega_c t_2 + \theta)dt_1 dt_2\right] \\ &= 4 \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} E[n(t_1)n(t_2)]\cos(\omega_c t_1 + \theta)\cos(\omega_c t_2 + \theta)dt_1 dt_2 \\ &= 2N_0 \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \delta(t_1 - t_2)\cos(\omega_c t_1 + \theta)\cos(\omega_c t_2 + \theta)dt_1 dt_2 \\ &= 2N_0 \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos^2(\omega_c t + \theta)dt \\ &= N_0 \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} (1 + \cos(2\omega_c t + 2\theta))dt \\ &= N_0 T \end{aligned}$$

故  $w \sim N(0, N_0 T)$  ----- (b)

### 3. 小結

結合(a)、(b)式可證明

$$z = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} r(t)[2\cos(\omega_c t + \theta)]dt = s + w$$

$$z = d\sqrt{2E_b T} + w, \text{ where } w \sim N(0, N_0 T)$$

## 二、 $w$ 的機率密度函數(pdf)

從(b)知  $w \sim N(0, N_0 T)$ ，是一個 Gaussian random process，若將時間固定，則可視為 Gaussian random variable，因此機率密度函數 pdf 為

$$f_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 T}} e^{-\frac{w^2}{2N_0 T}}$$

### 三、 Z 的訊雜比(SNR)

解調後的訊號  $z=s+w$ ，因此  $SNR_z = \frac{E[s^2]}{E[w^2]}$ 。

1. 計算  $E[s^2]$

$$\begin{aligned} E[s^2] &= E\left[(d\sqrt{2E_bT})^2\right] \\ &= E[2E_bTd^2] \\ &= 2E_bT E[d^2] \\ &= 2E_bT \left(1^2 \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2}\right) \\ &= 2E_bT \end{aligned}$$

2. 計算  $E[w^2]$

$$E[w^2] = \text{Var}[w] = N_0T$$

3. 計算 z 的 SNR

$$SNR_z = \frac{E[s^2]}{E[w^2]} = \frac{2E_bT}{N_0T} = \frac{2E_b}{N_0}$$

故  $SNR_z = \frac{2E_b}{N_0}$

### 四、 BER 的理論推導

1. Optimal detector

若假設  $P(d = +1) = P(d = -1) = \frac{1}{2}$ ，則 decision rule 中，MAP rule 等價於 ML rule。又因為通道是 AWGN，因此 ML rule 等價於 MD rule，採用計算最簡單的 MD rule 即可。

當  $d = +1$  時， $s_1 = \sqrt{2E_bT}$ 。

當  $d = -1$  時， $s_2 = -\sqrt{2E_bT}$ 。

$$\text{MD rule: } \hat{d} = \arg \min_d ((z - s_d)^2)$$

$$(z - s_1)^2 < (z - s_2)^2$$

$$(z - \sqrt{2E_b T})^2 < (z + \sqrt{2E_b T})^2$$

$$0 < (z + \sqrt{2E_b T})^2 - (z - \sqrt{2E_b T})^2$$

$$0 < (2z)(2\sqrt{2E_b T})$$

$$z > 0$$

因此若  $z > 0$  則  $\hat{d} = +1$ ，反之  $\hat{d} = -1$ 。

故 **optimal decision** 是  $z=0$ 。

## 2. 計算 BER

當  $d = +1$  時， $z \sim N(\sqrt{2E_b T}, N_0 T)$ ，因此

$$f(z|d = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 T}} \exp\left(-\frac{(z - \sqrt{2E_b T})^2}{2N_0 T}\right)$$

當  $d = -1$  時， $z \sim N(-\sqrt{2E_b T}, N_0 T)$ ，因此

$$f(z|d = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 T}} \exp\left(-\frac{(z + \sqrt{2E_b T})^2}{2N_0 T}\right)$$

與前面一樣假設  $P(d = +1) = P(d = -1) = \frac{1}{2}$ 。則有

$$\text{BER} = P(\text{error})$$

$$= \frac{1}{2} P(\text{error} | d = +1) + \frac{1}{2} P(\text{error} | d = -1)$$

$$= \frac{1}{2} P(z < 0 | d = +1) + \frac{1}{2} P(z > 0 | d = -1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f(z|d = +1) dz + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(z|d = -1) dz$$

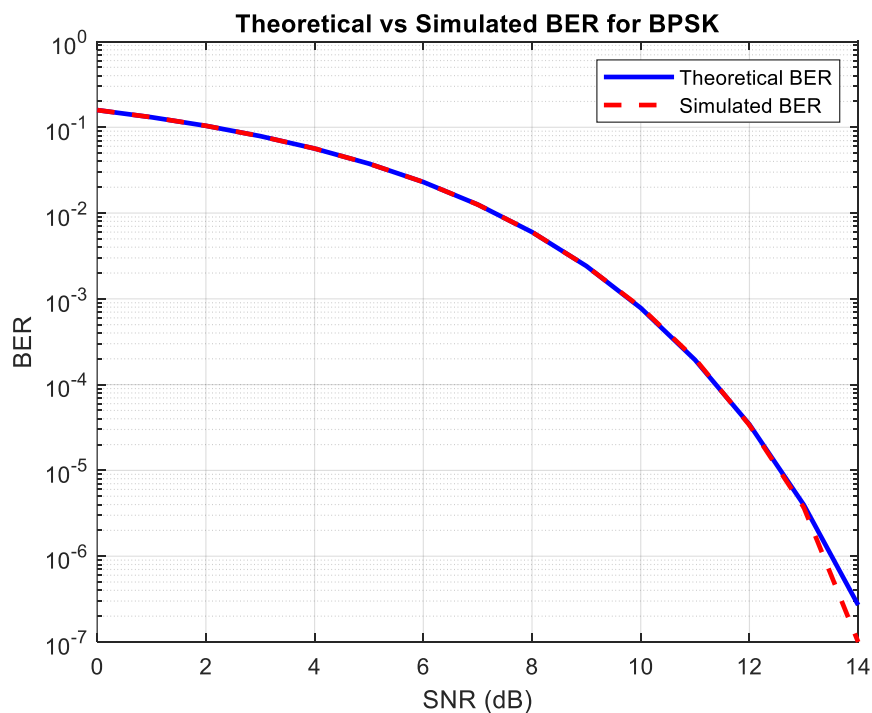
由於高斯函數的對稱性，可改寫為

$$\begin{aligned} \text{BER} &= \int_0^{\infty} f(z|d = -1) dz \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 T}} \exp\left(-\frac{(z + \sqrt{2E_b T})^2}{2N_0 T}\right) dz \\ &= \int_{\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

因此  $\text{BER} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{\text{SNR}_Z})$ 。

## Part 2. BER Simulations Using Matlab

### 模擬 1: Theoretical vs simulated BER



## 結論 1

在模擬中，我採用了  $10^7$  個訊號模擬點，可看到在  $\text{SNR}=14\text{dB}$  時，模擬曲線比理論曲線略低，代表這次模擬的錯誤 bits 數比預期的錯誤 bits 數還少。數值上，我們可以算出

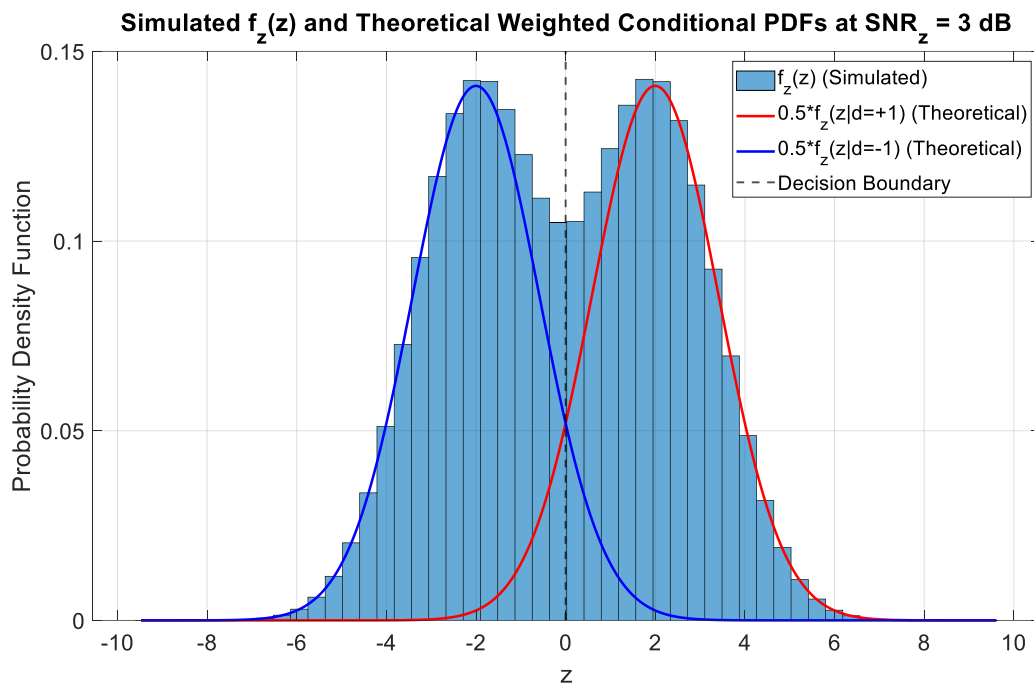
$$\text{BER}_{\text{theor}} = Q(\sqrt{\text{SNR}}) = Q\left(\sqrt{10^{\frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{10}}}\right) = Q\left(\sqrt{10^{\frac{14}{10}}}\right) \approx 2.87 \times 10^{-7}$$

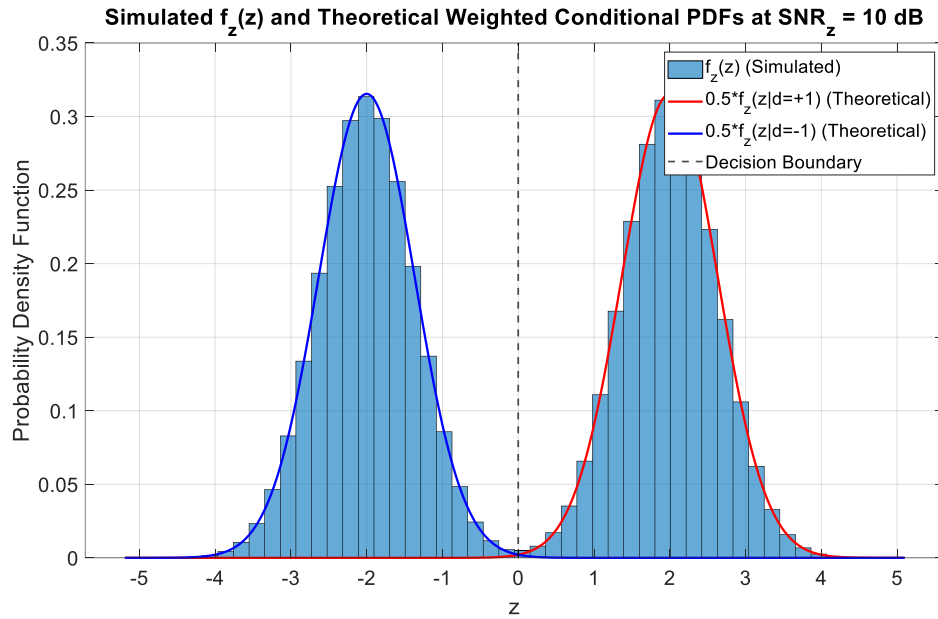
$$\text{Theoretical error bits} = \text{bits} \times \text{BER}_{\text{theor}} = 10^7 \times 2.87 \times 10^{-7} = 2.87$$

$$\text{Simulated error bits} = \text{bits} \times \text{BER}_{\text{sim}} = 10^7 \times 10^{-7} = 1$$

也就是說，雖然預期會出現 2.87 個錯誤 bits，但模擬結果只有出現 1 個錯誤 bits，這是因為隨機性的關係。如果想讓模擬更接近理論，可以採用更多的訊號模擬點，代價是要犧牲一些運算時間。

## 模擬 2: Simulated $f_z(z)$ vs theoretical condition pdf at $\text{SNR}=3\text{dB}$ and $10\text{dB}$





## 結論 2

可以看到在 3dB 時， $d = +1$  和  $d = -1$  的 pdf 重疊部分比 10dB 時還多上不少，代表較容易發生錯誤的情況，因此 3dB 的 BER 較大。由此可知，SNR 越高，BER 就會越低，與模擬 1 的結果一致。

另外，可以注意到上圖中的理論條件 pdf 有分別乘上係數 0.5，實際上就是乘以事前機率(Priori probability)，方便我們與模擬的 pdf 比較。數學上，表達如下：

$$\begin{aligned} \text{Theoretical } f_z(z) &= P(d = +1)f(z|d = +1) + P(d = -1)f(z|d = -1) \\ &= 0.5 \times f(z|d = +1) + 0.5 \times f(z|d = -1) \end{aligned}$$

$$\text{Simulated } f_z(z) = \frac{\text{Histogram of } z}{\text{bits} \times \text{bin width}}$$

## 附錄: MATLAB 程式碼

採用 Part1 推導的離散等效模型。

### 1. 定義參數

```
% Simulation BER of BPSK (Using equivalent discrete time model)
```

---

```
%% Parameters for BER to SNR_dB curve
```

```
SNR_dB = 0:1:14;  
sim_pts = length(SNR_dB);  
BER_sim = zeros(1, sim_pts);  
BER_theor = zeros(1, sim_pts);
```

---

```
%% Parameters of transmitter
```

```
M = 1e7; % Transmit M bits  
E_b = 1;  
A = 1;  
T = 2 * E_b / A^2;
```

2. 進入 for 迴圈，以遍歷所有的 SNR\_dB。同時給定 rng(.)，因此在不同的 SNR\_dB 時接受到的訊號是一樣的，而雜訊則是只有係數不一樣(同樣的高斯雜訊)，也就是控制實驗變因。

```
%% Loop for different SNR_dB value
```

```
for i = 1:sim_pts  
    SNR = 10^(SNR_dB(i) / 10); % SNR_dB=10log(SNR)  
    rng(17); % Control experimental variable
```

### 3. BPSK 離散時間等效模型

```
%% Transmitter
```

```
d = 2 * randi([0, 1], 1, M) - 1; % d=1, -1 with 50% chance  
s = d * sqrt(2 * E_b * T); % Equivalent transmitted signal
```

---

```
%% Channel
```

```
N_0 = 2 * E_b / SNR; % SNR=2*E_b/N_0 where PSD_n(t)=N_0/2  
w_mu = 0;  
w_sigma = sqrt(N_0 * T);  
w = w_mu + w_sigma * randn(1, M); % Equivalent noise
```

---

```
%% Receiver
```

```
z = s + w; % Equivalent demouldated signal  
d_hat = 2 * (z > 0) - 1; % Optimal detector, z>0 ? 1:-1
```

#### 4. 計算理論和模擬 BER

```
%% BER
% Theoretical BER
BER_theor(i) = 0.5 * erfc(sqrt(SNR) / sqrt(2)); % Q(sqrt(SNR_z))

% Simulated BER
error_count = sum(d_hat ~= d);
BER_sim(i) = error_count / M;
```

#### 5. 作圖

```
%% SNR_dB=3
% Save data for histogram later
if SNR_dB(i) == 3|
    z_SNR_3dB = z; % For f_z(z)
    w_sigma_3dB = w_sigma;
end
end

%% Plot
% Plot BER to SNR_dB curve
figure;
set(0, 'DefaultAxesFontSize', 18);

semilogy(SNR_dB, BER_theor, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Theoretical BER');
hold on;
semilogy(SNR_dB, BER_sim, 'r--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Simulated BER');
grid on;
xlabel('SNR (dB)'); ylabel('BER'); title('Theoretical vs Simulated BER for BPSK');
legend('show');

% Plot pdf
figure;
h = histogram(z_SNR_3dB, 'Normalization', 'pdf', 'DisplayName', 'f_z(z) (Simulated)'); % f_z(z)
h.NumBins = 50;
hold on;

z_range = linspace(min(z_SNR_3dB), max(z_SNR_3dB), 1000);
f_z_d_plus1 = normpdf(z_range, sqrt(2 * E_b * T), w_sigma_3dB);
f_z_d_minus1 = normpdf(z_range, -sqrt(2 * E_b * T), w_sigma_3dB);
plot(z_range, f_z_d_plus1/2, 'r-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', '0.5*f_z(z|d=+1) (Theoretical)'); % P(d=+1)*f_z(z|d=+1)
plot(z_range, f_z_d_minus1/2, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', '0.5*f_z(z|d=-1) (Theoretical)'); % P(d=-1)*f_z(z|d=-1)

xline(0, 'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'Decision Boundary'); % Decision line z=0

grid on;
xlabel('z');
ylabel('Probability Density Function');
title('Simulated f_z(z) and Theoretical Weighted Conditional PDFs at SNR_z = 3 dB');
legend('show');
```